Râul Alb

Iunie 2018

# Tabăra de MATE şi NU NUMAI

# PROBLEME DE NUMĂRARE- probleme pentru clasele V / VI

*prof. Camelia Pîrvu*
*Oraviţa, CS*

# Cuprins:



## 1. FOLOSIREA UNUI CONTOR DE NUMĂRARE

Ori de câte ori se cere a determina câte numere verifică o anumită proprietate dată, vom căuta un indice de numărare căruia îi atribuim valori numere naturale consecutive.

***Problema 1*.**

Se consideră tabloul:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \quad 3 \\ 4 \quad 5 \quad 6 \\ 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

a) Cu ce număr începe al 100-lea rând și care este suma numerelor din rândul 100?
b) În al câtălea rând se află numărul 100?

***Problema 2.***

Câte numere pare sunt de la $2^{1000}$ la $2^{2000}$ ?

***Problema 3*.** Fie şirul de fracţii: $\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{2}{2};\frac{2}{1};\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{3}{3};\frac{3}{2};\frac{3}{1};...;\frac{1}{n};\frac{2}{n};...;\frac{n}{n};\frac{n}{n-1};\frac{n}{n-2};...;\frac{n}{1}$ unde $n \in \mathbb{N}^*$

a) Dacă n= 2009, aflaţi numărul fracţiilor din şir.

b) Arătaţi că, pentru orice număr natural nenul, numărul fracţiilor din şir este un pătrat perfect

( G.M nr. 3/2009)

***Problema 4.***

Fie şirul de numere $(a_n)_{n\geq 1}$ : 22, 23, 25, 28, 32,……. Să se determine al 2018-lea număr al şirului.

***Problema 5.***

Câte numere naturale de trei cifre se pot scrie ca sumă a patru numere naturale consecutive?

(GM nr.1/2017)

***Problema 6*.**

Scriem numerele naturale nenule consecutive sub forma

1, 2, 3,

4, 5, 6, 7, 8, 9,

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18,

. . .

(pe fiecare linie avem cu 3 numere mai mult decât pe cea precedentă). Pe ce linie se va găsi numărul 2018? Pe a câta poziție?

(Concursul interjudețean Traian Lalescu, Timișoara 2018)

## 2. REGULA SUMEI:

***Dacă un anumit obiect A poate fi ales în m moduri, iar un alt obiect poate fi ales în n moduri, atunci alegerea lui „A sau B" poate fi realizata în m+n moduri ( trebuie avut în vedere ca nici o alegere a lui A să nu coincidă cu nici o alegere a lui B ). Dacă totuşi există astfel de coincidenţe ( în număr de k), atunci regula sumei de mai sus dă „m+n-k" moduri de alegere a lui „A sau B" .***

***Problema 7.*** Cu câte zerouri se termină numărul $N=1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot 2018$, notat și 2018!, numit 2018 factorial. Ce exponent are 2 în descompunerea în factori primi a lui N ?

***Problema 8*.**

Intr-o cutie se află 50 de cartonașe pe care sunt scrise primele 100 de numere naturale nenule, astfel: pe primul cartonaș sunt scrise numerele 1 (pe o parte) și 2 (pe cealaltă parte), pe al doilea cartonaș sunt scrise numerele 3 (pe o parte) și 4 (pe cealaltă parte) și așa mai departe, până la al 50-lea cartonaș, pe care sunt scrise numerele 99 (pe o parte) și 100 (pe cealaltă parte). Eliza scoate patru cartonașe din cutie și calculează suma celor opt numere scrise pe ele. Câte sume distincte poate obține Eliza?

(OJM 2018)

## 3. REGULA PRODUSULUI:

***Dacă un obiect A se poate alege în „ m" moduri şi dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în „n" moduri, atunci alegerea perechii (A,B) în acestă ordine poate fi realizată în „m·n" moduri. Dacă un obiect A se poate alege în „ m" moduri şi dacă după fiecare astfel de alegere, un obiect B se poate alege în „n" moduri,un obiect C se poate alege în „p" moduri, atunci alegerea tripletul (A,B,C) se poate face în „m·n·p" moduri.***

***Problema 9*.**

Să se determine câte numere (scrise în baza 10) de câte 4 cifre se pot forma, folosind numai cifrele 0, 1, 2 si 9.

***Problema 10.***

Un număr natural se numeşte *palindrom* dacă el coincide cu răsturnatul său (exemplu 525 sau 41714 ). Câte numere palindrom de 5 cifre există?

***Problema 11*.**

Un tablou de formă pătrată se împarte în 100 pătrățele identice, distribuite pe 10 linii și 10 coloane. Avem la dispoziție 10 cartonașe, numerotate diferit, cu cifre de la 0 la 9. Pe tablou trebuie să așezăm două cartonașe, având suma 10, în pătrățele situate pe linii și coloane diferite. Determinați numărul de posibilități de așezare a acestor cartonașe.

(OJM 2018)

***Problema 12*.**

Se consideră A mulțimea tuturor numerelor naturale $\overline{abc}$, formate din trei cifre consecutive, nu neapărat în ordine.

a) Determinați cardinalul mulțimii A.

b) Demonstrați că, oricum am alege câteva elemente din mulțimea A, suma acestora nu poate fi egală cu 2017.

(OJM 2017)

***Problema 13.***

Aflați câte numere naturale scrise în baza zece îndeplinesc simultan condițiile:

i) Numărul are șase cifre.

ii) Produsul cifrelor nenule ale numărului este 84.

iii) Patru dintre cifrele numărului sunt 2, 0, 1, 7.

(ONM 2017)

## 4. PRINCIPIUL INCLUDERII ŞI EXCLUDERII

Fie A, B, C multimi finite . Cardinalul multimilor A U B, A U B U C este dat de relatiile:

**a) card(A U B) = card(A) +card (B)- card (A∩B)**

**b) card(A U B U C)=card(A)+card(B)+card(C)-card(A∩B)-card(A∩C)-card(B∩C)+card(A∩B∩C).**

(cazuri particulare ale formulei Boole- Silvester).

***Problema 14*.**

Elevii unei clase joacă fotbal sau baschet: 19 joacă fotbal, 24 joacă baschet şi 16 practică ambele jocuri. Câţi elevi sunt în clasă?

Principiul includerii şi excluderii permite rezolvarea simplă a unor probleme de divizibilitate.

***Problema 15*.**

Aflaţi numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu 500 care sunt divizibile cu 2, 3 sau 5.

## 5. NUMĂRUL DIVIZORILOR UNUI NUMĂR NATURAL

Fie a un număr natural compus ce are următoarea descompunere în factori primi :

$$a = p_1^{\alpha 1} \cdot p_2^{\alpha 2} \cdot \ldots . p_n^{\alpha n} \ ,$$

unde $p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$ sunt numere prime iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n \in \mathbb{N}$ (forma canonică a lui a).

Pentru a obţine numărul divizorilor lui a, formăm tabelul :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_1^0$ | $p_1^2$ | $p_1^2$ | $p_1^3$ | $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p_1^{\alpha 1}$ | $\alpha_1$ +1 termeni |
| $p_2^0$ | $p_2^1$ | $p_2^2$ | $p_2^3$ | $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p_2^{\alpha 2}$ | $\alpha_2$+ 1 termeni |
| …… | | | | | |
| $p_n^0$ | $p_n^1$ | $p_n^2$ | $p_n^3$ | $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p_n^{\alpha n}$ | $\alpha_n$ +1 termeni |

Un divizor oarecare se formează înmulţind un număr din prima linie, cu un număr din a doua linie şi aşa mai departe până la ultima linie. Numărul din prima linie se poate alege în $(\alpha_1 + 1)$ moduri, cel de-al doilea număr în $(\alpha_2 + 1)$ moduri ş.a,.m.d. În acest mod putem forma $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots\ldots..(\alpha_n+1)$ divizori.

**Teoremă:** *Numărul divizorilor numărului* $a = p_1^{\alpha 1} \cdot p_2^{\alpha 2} \cdot \ldots\ldots p_n^{\alpha n}$ *este*

$$\boldsymbol{d(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots.(\alpha_n + 1).}$$

Pentru n numar natural, vom nota cu **d(a)-** numărul divizorilor naturali ai lui a.

***Problema 16.***

Determinaţi numărul divizorilor lui 2018 şi 2020.

***Problema 17.***

Câţi divizori în mulţimea numerelor naturale are numărul $2^{10} \cdot 5^9 + 2 \cdot 5^8$.

***Problema 18.***

Determinaţi toate numerele de forma $a = 2^m \cdot 3^n$, unde m şi n sunt numere naturale care au exact 8 divizori.

***Problema 19.***

Să se determine numărul natural n care are exact trei divizori şi suma divizorilor este 553.

(OLM CLuj 2018)

***Problema 20.***

Să se determine toate numerele scrise în baza 10 care sunt divizibile cu 15 şi au 14 divizori.

### 5.1. SUMA DIVIZORILOR UNUI NUMĂR NATURAL (d(a)).

Să calculăm mai întâi suma $S = 1 + x + x^2 + \dots x^n$.

$$\text{Se ştie că } S = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \text{ ;cu } x \neq 1.$$

Scriem produsul de n sume avand termenii pe cele n linii din table şi obţinem

$$\left(1+p_1+p_1^2+\dots+p_1^{\alpha_1}\right)\left(1+p_2+p_2^2+\dots+p_2^{\alpha_1}\right)\dots\left(1+p_n+p_n^2+\dots+p_n^{\alpha_1}\right)=\frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\dots\cdot\frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}$$

Un astfel de produs se efectuează înmulţind în toate modurile posibile câte un termen din fiecare paranteză, în felul acesta se formează toţi divizorii numărului a.

Am obţinut astfel **teorema** :

***suma divizorilor numărului $a = p_1^{\alpha 1} \cdot p_2^{\alpha 2} \cdot \dots\dots p_n^{\alpha n}$ este***

$$S = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1}\cdot\dots\cdot\frac{p_n^{\alpha_n+1}-1}{p_n-1}$$

***Problema 21.***

Fie S suma divizorilor naturali ai nr 2020. Să se arate că S este divizilă cu 17.

### 5.2. PRODUSUL DIVIZORILOR UNUI NUMĂR NATURAL (p(a)).

***Dacă $d_1, d_2, \dots d_k$ sunt toţi divizorii naturali ai numarului a atunci avem relaţia :***

$$\left(d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k\right)^2 = a^k$$

*Soluţie:*

Considerăm $d_1 < d_2 < \dots\dots < d_k$ şi obţinem

$$a = d_1 \cdot d_k \Rightarrow d_1 = \frac{a}{d_k}; a = d_2 \cdot d_{k-1} \Rightarrow d_2 = \frac{a}{d_{k-1}}; \dots a = d_1 \cdot d_k \Rightarrow d_K = \frac{a}{d_1},$$

relaţii care înmulţite membru cu membru dau

$$a = d_1 \cdot d_k \Rightarrow d_1 = \frac{a}{d_k}; a = d_2 \cdot d_{k-1} \Rightarrow d_2 = \frac{a}{d_{k-1}}; \dots a = d_1 \cdot d_k \Rightarrow d_K = \frac{a}{d_1}$$

$$d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k = \frac{a}{d_k} \cdot \frac{a}{d_{k-1}} \cdot \dots \cdot \frac{a}{d_1} \Rightarrow \left(d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k\right)^2 = a^k$$

***Problema 22.***

Să se calculeze produsul tuturor divizorilor naturali ai numărului 2016.

## 6. PROBLEME PROPUSE:

**1)** Se consideră următorul tablou de numere:

7

14 21

28 35 42

49 56 63 70

………………………

a) Cu ce număr începe al 20-lea rând ?

b) Pe ce rând se află numărul 2009 ?

c) Al câtălea este 2009 pe rândul respectiv ?

*(The Clock-Tower School* - **Juniors II, Rm. Vâlcea 2009)**

*Indicație:*

7=7·1; 21=7·3=7·(1+2); 42=7·6=7·(1+2+3)

**2)** **a)** Arătați că suma S=2+9+16+23+...+2018 este divizibilă cu 10 .

**b)** Suma a 12 numere naturale distincte este 88. Arătați că produsul lor se divide cu 3 și cu 5.

(OLM Timiş 2018)

*Indicație:*

Aplicăm contor de numărare (sau formula termenului general 7k+2).
Dacă unul dintre numere este 0 atunci produsul este 0, care este divizibil cu 3 și cu 5.
Dacă cele 12 numerele sunt nenule. Demonstrăm că dintre cele 12 numere cel puțin unul se divide cu 3, apoi cu 5. Presupunem că nici unul din cele 12 nr nu se divide cu 3 și cum cele mai mici numere posibile formează $S=1+2+4+5+7+8+10+11+13+14+16+17=108$ rezultă că contradicție.
Analog demonstrăm pentru 5.

**3)** Pentru fiecare număr natural nenul n se notează $p(n)$ numărul pătratelor perfecte nenule, cel mult egale cu n și $S_n = p(1)+p(2)+p(3)+...+p(n)$.

a) Calculați $S_{17}$;

b) Determinați cel mai mic număr natural n pentru care $S_n > 2017$

(SGM 12/2017)

**FORMULE UTILE**

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$1+3+5+...+(2n+1)=n^2$$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+...+n\cdot(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

*Indicație:*

a) $S_{17} = p(1)+p(2)+p(3)+...+p(17)$

De ex., $p(17)$ este numărul pătratelor perfecte nenule mai mici decât 17 $(1=1^2, 4=2^2, 9=3^2, 16=4^2) \Rightarrow p(17)=4 \Rightarrow S_{17}=42$

b) $S_n = p(1)+p(2)+p(3)+...+p(n)$

Pentru n luând valori de la $1^2$ $la\, 2^2-1$ avem $p(1)=p(2)=p(3)=1 \Rightarrow p(1)+p(2)+p(3)=3\cdot1$

Pentru n luând valori de la $2^2$ $la\, 3^2-1$ avem $p(4)=p(5)=p(6)=p(7)=p(8)=2$

$\Rightarrow p(4)+p(5)+p(6)+p(7)+p(8)=5\cdot2$, ș.a.m.d.

Pentru n luând valori de la $k^2$ $la\,(k+1)^2-1$ avem suma parțială $(2k+1)\cdot k$

$\Rightarrow 3\cdot1+5\cdot2+...+(2k+1)\cdot k>2017 \Rightarrow (2\cdot1+1)\cdot1+(2\cdot2+1)\cdot2+...+(2k+1)\cdot k>2017$ ...

**4)** Să se determine numerele naturale m şi n ştiind că numărul $2^m \cdot 5^n$ are cu 6 divizori mai mult decât numărul $3^n$.

*Indicaţie:*

Numărul divizorilor lui $2^m \cdot 5^n$ este $(m+1)(n+1)$ iar cei ai numărului $3^n$ este $(n+1)$.

**5)** Determinaţi câţi dintre divizorii numărului $2016^{10}$ sunt multipli al lui $126^8$.

(SGM 9/2015)

*Soluţie:* $2016^{10} = 2^{50} \cdot 3^{20} \cdot 7^{10}$ şi $126^8 = 2^8 \cdot 3^{16} \cdot 7^8$. Căutăm multiplii de forma $2^a, 8 \le a \le 50$; $3^b, 16 \le b \le 20$ şi $7^c, 8 \le c \le 10$ precum şi produsele acestora. Aplicând regula produsului obţinem cerinţa.

**6)** Arătaţi că fracţia $\frac{2020!}{2020^{20}}$ este număr natural. Prin $2020!$ s-a notat produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2019 \cdot 2020$.

**7)** Determinaţi numărul natural n care admite exact 4 divizori naturali, ştiind că produsul divizorilor este 2601.

(SGM 4/2016)

## 7. INDICAȚII ȘI SOLUȚII:

**P1: *Soluţie*:**

a) Ultimul număr al fiecărei linii: 1; 3=1+2; 6=(1+2)+3; 10=(1+2+3)+4 etc.

Linia n: $\frac{n(n+1)}{2} = 1+2+...+n.$ și are n numere. A 100-lea rând începe cu 4951 și se termină cu 5050.

S= 4951+4952+…+5050= (4950+1)+(4950+2)+…+(4950+100) =500050.

b) $\frac{13 \cdot 14}{2} < 100 < \frac{14 \cdot 15}{2}$. Numărul 100 se află pe a 14-a linie.

**P2: *Soluţie*:**

$2^{1000}=2^{1000}+0=2^{1000} + 2 \cdot 0$

$2^{1000} + 2 = 2^{1000} + 2 \cdot 1$

$2^{1000} + 4 = 2^{1000} + 2 \cdot 2$

………………………

$2^{2000} = 2^{1000} + 2 \cdot x$

Se determină x; $2 \cdot x = 2^{2000} - 2^{1000}$ => $x = 2^{1999} - 2^{999}$ => $x = 2^{999}(2^{1000} - 1)$. Contorul de numărare ia valori de la 0 la $2^{999}(2^{1000} - 1)$. Prin urmare sunt $2^{1999} - 2^{999}+1$ numere pare.

**P3: *Soluţie*:** a) pentru n= 2009, numărul fracţiilor este

$1+3+5+...+x$, de unde deduce $(2 \cdot 1-1)+(2 \cdot 2-1)+(2 \cdot 3-1)+...+(2 \cdot 2009-1) = 2009^2$

b) 1+3+5+……..+(2n-1) = $n^2$; pentru orice n numar natural.

**P4: *Soluţie*:** $a_1$ =22

$a_2 = 23=22+1=a_1+ 1$

$a_3 = 25=23+2=22+1+2= a_1+1+2$

$a_4 = 28=25+3=22+1+2+3= a_1 +1+2+3$

……………………….

$a_{2018} = a_{2017} + 2017 = a_1+1+ 2+3+…+2017 = ...$

**P5: *Soluție*:**

Dacă $n, n+1, n+2, n+3$ sunt cele patru numere consecutive, se obține

$\overline{abc} = 4n+6 \Rightarrow 100 \leq 4n+6 \leq 999$, de unde se determină n.

**P6: *Soluție*:**

Se observă că pe linia k se găsesc 3k numere.

Analizăm forma numerelor de pe fiecare linie, pentru a găsi o formă generală și avem 1,4,10,... sunt de forma 3x+1 iar 3,9,18,... au forma 3y

$$1 = 3\cdot 0 + 1 = 3\cdot\frac{1\cdot(1-1)}{2} + 1, 4 = 3\cdot 1 + 1 = 3\cdot\frac{2\cdot(2-1)}{2} + 1, 10 = 3\cdot 3 + 1 = 3\cdot\frac{3\cdot(3-1)}{2} + 1$$

$$3 = 3\cdot 1 = 3\cdot\frac{1\cdot(1+1)}{2}, 9 = 3\cdot 3 = 3\cdot\frac{2\cdot(2+1)}{2}, 18 = 3\cdot 6 = 3\cdot\frac{3\cdot(3+1)}{2}$$

Deci 2018 se va afla pe linia k dacă $3\cdot\frac{k\cdot(k-1)}{2} < 2018 \leq 3\cdot\frac{k\cdot(k+1)}{2} \Rightarrow k = 37$

Din calcul reiese că 2018 se află pe poziția 20 în linia 37.

**P7: *Soluție*:**

Numărul de zerouri este egal cu exponentul lui 5 din descompunerea în factori primi a lui N. Multipli de 5 sunt: 5,10,15,...,2015, deci 403 numere.

Multipli de 25 sunt: 25, 50, 75,...,2000, deci 80 numere.

Multipli de 125 sunt în număr de 16, sunt 3 multiplii de 625 .

În total 5 apare de 502 de ori ca factor în N. Cum numere pare sunt 1009, N se termină cu 502 de zerouri.

În șirul 1,2,...,2018 avem 1009 de numere pare, 504 de multipli de 4, 252 multipli de 8, 126 multipli de 16, 63 multipli de 32, 31 multipli de 64, 15 multipli de 128, 7 multipli de 256, 3 multipli de 512, 1 multiplu de 1024, deci 2 apare cu exponentul 2011.

**P8: *Soluție*:**

Sumele celor două numere de pe fiecare cartonaș sunt: 3, 7, 11, 15, ..., 195, 199, adică numerele de forma 4k − 1, unde k este un număr natural care ia valori între 1 și 50.

Dacă 4a − 1, 4b − 1, 4c − 1 și 4d − 1 sunt sumele de pe cele 4 cartonașe, suma totală este 4(a + b + c + d)−4, deci problema se reduce la a calcula numărul de valori pe care le poate lua suma a patru numere naturale nenule a < b < c < d, cuprinse între 1 și 50. Suma minimă este 1 + 2 + 3 + 4 = 10, iar suma maximă este 47 + 48 + 49 + 50 = 194.

Vom arăta că fiecare sumă a + b + c + d poate lua toate valorile de la 10 la 194, adică în total 185 de valori. Astfel avem:

- sumele de la 10 la 56 se obțin pentru a = 1, b = 2, c = 3 și d luând valori de la 4 la 50: 1 + 2 + 3 + 4, 1 + 2 + 3 + 5, 1 + 2 + 3 + 6, ..., 1 + 2 + 3 + 50
- sumele de la 57 la 102 se obțin pentru a = 1, b = 2, d = 50 și c luând valori de la 4 la 49: 1 + 2 + 4 + 50, 1 + 2 + 5 + 50, 1 + 2 + 6 + 50, ..., 1 + 2 + 49 + 50
- sumele de la 103 la 148 se obțin pentru a = 1, c = 49, d = 50 și b luând valori de la 3 la 48: 1 + 3 + 49 + 50, 1 + 4 + 49 + 50, 1 + 5 + 49 + 50, ..., 1 + 48 + 49 + 50
- sumele de la 149 la 194 se obțin pentru b = 48, c = 49, d = 50 și a luând valori de la 2 la 47: 2 + 48 + 49 + 50, 3 + 48 + 49 + 50, 4 + 48 + 49 + 50, ..., 47 + 48 + 49 + 50

În concluzie, Eliza poate obține 185 de sume diferite, și anume toate numerele cuprinse între 4 · 10 − 4 = 36 și 4 · 194 − 4 = 772, numărate din 4 în 4.

**P9: *Soluţie:*** Un astfel de număr este de forma $\overline{abcd}$; pentru cifra a avem 3 posibilităţi de alegere: 1, 2 şi 9 iar pentru oricare din celelalte 3 cifre avem câte 4 posibilităţi de alegere. Folosind regula produsului, obţinem $3\cdot 4\cdot 4\cdot 4 = 192$ de numere.

**P10: *Soluţie*:** Evident, e suficient să alegem primele 3 cifre (celelalte coincid cu a doua, respectiv cu prima). Alegerea se poate face în 9 moduri pentru prima cifra (fără 0 ), apoi în câte 10 moduri pentru următoarele două. Cu regula produsului obţinem $9\cdot 10\cdot 10 = 900$ numere.

**P11: *Soluţie*:**
Deoarece suma cifrelor trebuie să fie egală cu 10, există doar 4 perechi de cartonașe care se pot plasa pe tablou. Primul cartonaș se poate plasa în orice pătrățel, deci există 100 variante. Pentru al doilea cartonaș mai rămân 9 linii și 9 coloane la dispoziție, adică 81 de variante. Prin urmare avem $100 \times 81 = 8100$ variante de plasare a unei perechi de cartonașe. Deoarece avem 4 perechi, atunci avem în total $4 \times 8100 = 32400$ variante.

**P12: *Soluţie*:**
a) {0,1,2} generează 4 numere. Tripletele {1,2,3}, {2,3,4},..., {7,8,9} generează fiecare câte 6 numere. Cardinalul lui A este $4 + 7 \cdot 6 = 46$.
b) Orice număr din A este divizibil cu 3. Cum 2017 nu se divide cu 3, suma oricăror elemente din A nu poate fi 2017.

**P13: *Soluţie*:**
Cum $84:(2\cdot 1\cdot 7)=6$, deosebim următoarele cazuri:
I) Cifrele sunt 2, 0, 1, 7, 0, 6. Dacă prima cifră este 1, atunci cele 5 cifre rămase pot fi aranjate în 60 de moduri; analog dacă prima cifră este 2, 6 sau 7. În acest caz sunt 240 de numere.
II) Cifrele sunt 2, 0, 1, 7, 1, 6 . Dacă prima cifră este 2, atunci cele 5 cifre rămase pot fi aranjate în 60 de moduri; analog dacă prima cifră este 6 sau 7. Dacă prima cifră este 1 se obțin 120 de numere. În total, în acest caz sunt 300 de numere.
III) Cifrele sunt 2, 0, 1, 7, 2, 3 . Dacă prima cifră este 1, 3 sau 7, se obțin $3 \cdot 60 = 180$ de numere, iar dacă prima cifră este 2 se obțin 120 de numere. În total, în acest caz sunt 300 de numere.
Așadar, în total sunt 840 de numere.

**P14: *Soluţie*:** Aplicăm principiul includerii şi excluderii:
Card (F U B)= cardF+ cardB- card(F ∩ B)=19+24-16=27. Deci numărul elevilor din clasa este 27.

**P15: *Soluţie*:** Fie A mulţimea numerelor naturale mai mici sau egale cu 500 care sunt divizibile cu 2, B mulţimea celor divizibile cu 3 şi C mulţimea numerelor divizibile cu 5. Vom folosi partea întreagă pentru că ne intereseaza numai câturile. Atunci

cardA =[500/2] = 250, cardB = [500/3] = 166 , cardC=[500/5]=100, card(A∩B)=[500/6] , card(B∩C)=[500/15] =33 , card( A∩C)=[500/10]=50 , card(A∩B∩C)=[500/30]= 16.

Avem card(AUBUC)=250+166+100-83-33-50+16 = 366 . Acum putem afla şi numărul numerelor naturale mai mici sau egale cu 500 care nu sunt divizibile cu 2, nici cu 3, nici cu 5. Acestea sunt în număr de 500-366=134.

**P16: *Soluție*:**

$$2018=2\cdot 1009\Rightarrow d(2018)=(1+1)\cdot(1+1)=4$$

$$2020=2^2\cdot 5\cdot 101\Rightarrow d(2020)=(2+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)=12$$

**P17: *Soluție*:**

Numărul dat se poate scrie $2^9\cdot 5^8\cdot 11$. Rezultă (9+1)(8+1)(1+1)=180 divizori.

**P18: *Soluție*:** (m+1)(n+1)=8; rezultă numerele $3^7$, 54, 24, $2^7$.

**P19: Solutie:**

Un număr natural care are exact trei divizori este pătratul perfect al unui număr prim.

Fie $1, d, d^2$ cei trei divizori $\Rightarrow 1+d+d^2=553\Rightarrow d(1+d)=552\Rightarrow d=23\Rightarrow n=529$

**P20: *Soluție:*** 15|A=> A= $3^x\cdot 5^y\cdot p_1^{k1}\cdot p_2^{k2}$ …..; $x,y\neq 0$.

$d(A)=(x+1)(y+1)(k_1+1)(k_2+1)\ldots$

Cum $x+1\neq 1$ si $y+1\neq 1$ => x+1=2 si y+1 =7 sau x+1=7 şi y+1=2. Deci x=1 şi y=6 sau x=6 şi y=1. Numerele care satisfac condiţia problemei sunt A= $3\cdot 5^6$ sau A=$3^6\cdot 5$.

**P21: *Soluție:***

$2020=2^2\cdot 5\cdot 101$ de unde $S=\frac{2^3-1}{2-1}\cdot\frac{5^2-1}{5-1}\cdot\frac{101^2-1}{101-1}=\frac{7}{1}\cdot\frac{24}{4}\cdot\frac{10200}{100}=7\cdot 6\cdot 102=7\cdot 6\cdot 2\cdot 3\cdot 17$

**P22: *Soluție:*** $2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$, iar numărul divizorilor este (5+1)(3+1)(1+1)=48;

Rezultă relaţia: $(d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_{48})^2=2016^{48}\Rightarrow d_1\cdot d_2\cdot\ldots\cdot d_{48}=2016^{24}$